

***MATURA
ROZSZERZONA
MAJ 2025***

FORMUŁA 2015

WYPEŁNIA ZDAJĄCY

KOD

--	--	--

PESEL

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Miejsce na naklejkę.

Sprawdź, czy kod na naklejkę to

E-100.

Jeżeli tak – przyklej naklejkę.

Jeżeli nie – zgłoś to nauczycielowi.

Egzamin maturalny

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Symbol arkusza

EMAP-R0-**100**-2505

DATA: 12 maja 2025 r.

GODZINA ROZPOCZĘCIA: 9:00

CZAS TRWANIA: 180 minut

LICZBA PUNKTÓW DO UZYSKANIA: 50

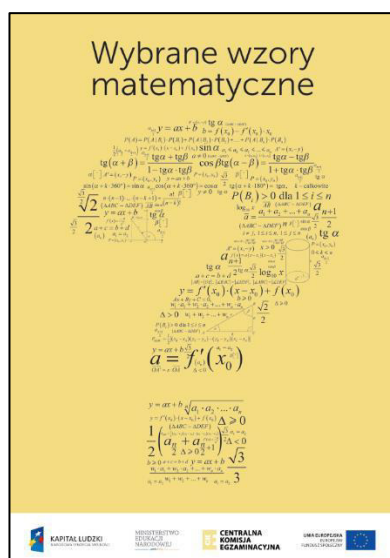
Przed rozpoczęciem pracy z arkuszem egzaminacyjnym

1. Sprawdź, czy nauczyciel przekazał Ci **właściwy arkusz egzaminacyjny**, tj. arkusz we **właściwej formule**, z **właściwego przedmiotu** na **właściwym poziomie**.
2. Jeżeli przekazano Ci **niewłaściwy** arkusz – natychmiast zgłoś to nauczycielowi. Nie rozrywaj banderol.
3. Jeżeli przekazano Ci **właściwy** arkusz – rozerwij banderole po otrzymaniu takiego polecenia od nauczyciela. Zapoznaj się z instrukcją na stronie 2.



Instrukcja dla zdającego

1. Sprawdź, czy arkusz egzaminacyjny zawiera 29 stron (zadania 1–15).
Ewentualny brak zgłoś przewodniczącemu zespołu nadzorującego egzamin.
2. Na pierwszej stronie arkusza oraz na karcie odpowiedzi wpisz swój numer PESEL i przyklej naklejkę z kodem.
3. Odpowiedzi do zadań zamkniętych (1–4) zaznacz na karcie odpowiedzi w części przeznaczonej dla zdającego. Zamaluj  pola do tego przeznaczone. Błędne zaznaczenie otocz kółkiem  i zaznacz właściwe.
4. W zadaniu 5. wpisz odpowiednie cyfry w kratki pod treścią zadania.
5. Pamiętaj, że pominięcie argumentacji lub istotnych obliczeń w rozwiązaniu zadania otwartego (6–15) może spowodować, że za to rozwiązanie nie otrzymasz pełnej liczby punktów.
6. Rozwiązania zadań i odpowiedzi wpisuj w miejscu na to przeznaczonym.
7. Pisz czytelnie i używaj tylko długopisu lub pióra z czarnym tuszem lub atramentem.
8. Nie używaj korektora, a błędne zapisy wyraźnie przekreśl.
9. Nie wpisuj żadnych znaków w części przeznaczonej dla egzaminatora.
10. Pamiętaj, że zapisy w brudnopisie nie będą oceniane.
11. Możesz korzystać z *Wybranych wzorów matematycznych*, z cyrkla i linijki oraz z kalkulatora prostego. Upewnij się, czy przekazano Ci broszurę z okładką taką jak widoczna poniżej.



W każdym z zadań od 1. do 4. wybierz i zaznacz na karcie odpowiedzi poprawną odpowiedź.

Zadanie 1. (0–1)

Suma wszystkich pierwiastków wielomianu $W(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 11$ jest równa

- ☒ A. (-5) B. (-3) C. 3 D. 5

Zadanie 2. (0–1)

Funkcja f jest określona wzorem $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 + 9}$ dla każdej liczby rzeczywistej x .

Zbiorem wszystkich argumentów, dla których funkcja f przyjmuje wartości dodatnie, jest

- A. $(2, 3)$
B. $(-3, -2)$
C. $(-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$
☒ D. $(-\infty, -3) \cup (-2, +\infty)$

Zadanie 3. (0–1)

Wartość wyrażenia $\cos \frac{7\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3}$ jest równa

- A. $(-\frac{3}{2})$ B. $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$ C. $\frac{1}{2}$ ☒ D. $\frac{3}{2}$

Zadanie 4. (0–1)

Granica $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 + 2x - 12}$ jest równa

- A. $\frac{2}{5}$ B. $\frac{4}{5}$ ☒ C. $\frac{6}{5}$ D. $\frac{12}{5}$

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

Zad. 1

$$W(x) = x^3 + 5x^2 - 7x - 11$$

$$W(x_i) = 0$$

$$\sum x_i = ?$$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad W(x) &= (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3) = \dots = \\ &= x^3 - (x_1+x_2+x_3)x^2 + (x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)x - x_1x_2x_3 \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad -(x_1+x_2+x_3) = 5 \quad | \cdot (-1)$$

$$\underline{\underline{\sum x_i = x_1+x_2+x_3 = -5}} \quad \textcircled{A}$$

Zad. 2

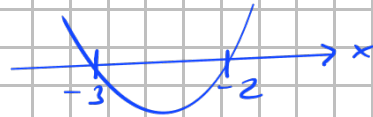
$$f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x^2+9}$$

$$x = ?$$

$$\textcircled{1} \quad f(x) > 0$$

$$\textcircled{1} \quad \frac{x^2+5x+6}{x^2+9} > 0 \quad | \cdot (x^2+9) > 0 \quad \wedge \quad D_f = \mathbb{R}$$

$$(x+3)(x+2) > 0$$



$$\underline{\underline{x \in (-\infty; -3) \cup (-2; \infty)}} \quad \textcircled{D}$$

Zad. 3

$$\begin{aligned} W &= \cos \frac{7\pi}{6} \cdot \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} = \cos \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) \cdot \operatorname{tg} \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= -\cos \frac{\pi}{6} \cdot \left(-\operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (-\sqrt{3}) = \underline{\underline{\frac{3}{2}}} \quad \textcircled{P} \end{aligned}$$

Zad. 4

$$W = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{2x^2 + 2x - 12} \stackrel{\left[\frac{0}{0} \right]}{=} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x^2 + 2x + 4)}{2(x^2 + x - 6)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cancel{(x-2)} \cdot (x^2 + 2x + 4)}{2(x+3)\cancel{(x-2)}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{2x + 6} =$$

$$= \frac{4+4+4}{4+6} = \frac{12}{10} = \underline{\underline{\frac{6}{5}}} \quad \textcircled{C}$$

Zadanie 5. (0–2)

Sąsiednie boki równoległoboku mają długość 6 i 9. Pole tego równoległoboku jest równe 18. Oblicz długość dłuższej przekątnej tego równoległoboku.

W poniższe kratki wpisz kolejno – od lewej do prawej – cyfrę dziesiątek, cyfrę jedności i pierwszą cyfrę po przecinku rozwinięcia dziesiętnego otrzymanego wyniku.

--	--	--

BRUDNOPIS (nie podlega ocenie)

$d = |AC|$
 $P_{ABCD} = 18$ ②

① $\beta = 180^\circ - \alpha$ $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$
 ② $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 9 \cdot \sin \alpha = 18 \quad | : 27$
 $\sin \alpha = \frac{2}{3} = \sin(180^\circ - \alpha) = \sin \beta$
 ③ $\cos \beta = -\sqrt{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^2} = -\sqrt{\frac{5}{9}} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$
 ④ $\triangle ABC$ - Tw. cosin.
 $d^2 = 9^2 + 6^2 - 2 \cdot 9 \cdot 6 \cdot \cos \beta$
 $d^2 = 81 + 36 + 18 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$
 $d^2 = 117 + 36\sqrt{5}$
 $d^2 = 9(13 + 4\sqrt{5}) \quad | \sqrt{\cdot}, d > 0$
 $d = 3\sqrt{13 + 4\sqrt{5}} \approx 14,053 \rightarrow \underline{1} \underline{4} \underline{5}$

Zadanie 6. (0–3)

Wykaż, że dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej a i dla każdej dodatniej liczby rzeczywistej b takich, że $b \neq \frac{1}{2}a$, prawdziwa jest nierówność

$$(a + 2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$\text{Z: } a, b \in \mathbb{R}^+ \\ b \neq \frac{1}{2}a$$

$$\text{T: } (a+2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

D:

$$(a+2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

$$(a+2b)^3 - 8ab(a+2b) > 0$$

$$(a+2b) [(a+2b)^2 - 8ab] > 0$$

$$(a+2b) \cdot (a-2b)^2 > 0$$

$$\underbrace{>0}_{\text{dla } a, b \in \mathbb{R}^+} \quad \underbrace{>0}_{\text{dla } b \neq \frac{1}{2}a}$$

$$\wedge (a+2b) \cdot (a-2b)^2 > 0 \\ a, b \in \mathbb{R}^+ \\ b \neq \frac{1}{2}a$$

wiec

$$\wedge \\ a, b \in \mathbb{R}^+ \\ b \neq \frac{1}{2}a \quad (a+2b)^3 > 8a^2b + 16ab^2$$

co d.

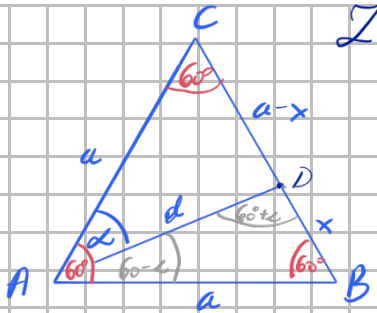
Wypełnia egzaminator	Nr zadania	5.	6.
	Maks. liczba pkt	2	3
	Uzyskana liczba pkt		

Zadanie 7. (0-3)

W trójkącie równobocznym ABC punkt D leży na boku BC . Stosunek pola trójkąta ABD do pola trójkąta ADC jest równy $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$.

Wykaż, że miara kąta DAC jest równa 45° .

L:



T:

$\alpha = 45^\circ$

② $\frac{P_{ABD}}{P_{ADC}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

$h = \text{wysokość } \triangle ABC \rightarrow h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$180^\circ - 60^\circ - \alpha = 120^\circ$

① $\angle DAB = 60^\circ - \alpha$
 $\angle ADB = \alpha + 60^\circ$

②

$$\frac{\frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin(60^\circ - \alpha)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot d \cdot \sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\sin 60^\circ \cdot \cos \alpha - \cos 60^\circ \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos \alpha - \frac{1}{2} \cdot \sin \alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cot \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad | \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\cot \alpha = 1 \quad , \quad \alpha \in (0^\circ; 60^\circ)$$

$\alpha = 45^\circ$ cnd.

Zadanie 8. (0-3)

Doświadczenie losowe polega na czterokrotnym rzucie symetryczną sześcienną kostką do gry, która na każdej ścianie ma inną liczbę oczek – od jednego oczka do sześciu oczek. Oblicz prawdopodobieństwo zdarzenia polegającego na tym, że otrzymamy co najmniej jeden raz sześć oczek, pod warunkiem że otrzymamy dokładnie dwa razy pięć oczek.

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \rightarrow n = 6 \text{ (nr. na kostce)}$$

$$k = 4 \text{ (ruty kostek)}, k!, P \rightarrow \overline{\Omega} = n^k$$

A - co najmniej jeden raz otrzymano 6 oczek
 B - dokładnie dwa razy otrzymano 5 oczek

$$P(A|B) = ?$$

$$\textcircled{1} \overline{\Omega} = 6^4$$

Metoda

$$\textcircled{2} \overline{B} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \times \binom{4}{2} = 5^2 \cdot \frac{3 \cdot 6}{2} = 25 \cdot 6 = \underline{150}$$

$$\textcircled{3} \overline{A \cap B} = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{4}{6} \times \binom{4}{2} \cdot \binom{2}{1} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \times \binom{4}{2} =$$

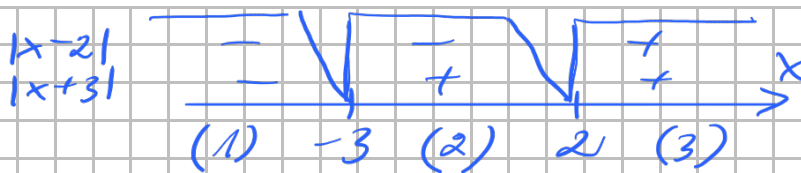
$$= 4 \times 6 \cdot 2 + 6 = \underline{54}$$

$$\textcircled{4} \underline{\underline{P(A|B)}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\overline{A \cap B}}{\overline{B}} = \frac{54}{150} = \underline{\underline{\frac{9}{25}}}$$

Zadanie 9. (0-4)

Rozwiąż nierówność

$$|x - 2| - 2 \cdot |x + 3| < -2$$

(1) dla $x \in (-\infty; -3)$:

$$-(x-2) + 2(x+3) < -2$$

$$-x + 2 + 2x + 6 < -2$$

$$x < -10 \quad \wedge \quad (1)$$

$$\underline{x_1 \in (-\infty; -10)}$$

(2) dla $x \in (-3; 2)$:

$$-(x-2) - 2(x+3) < -2$$

$$-x + 2 - 2x - 6 < -2$$

$$-3x < 2 \quad | : (-3)$$

$$x > -\frac{2}{3} \quad \wedge \quad (2)$$

$$\underline{x_2 \in (-\frac{2}{3}; 2)}$$

(3) dla $x \in (2; \infty)$:

$$x-2 - 2(x+3) < -2$$

$$x-2 - 2x-6 < -2$$

$$-x < 6 \quad | (-1)$$

$$x > -6 \quad \wedge \quad (3)$$

$$\underline{x_3 \in (2; \infty)}$$

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 :$$

$$\underline{\underline{\text{Odp: } x \in (-\infty; -10) \cup (-\frac{2}{3}; \infty)}}$$

Zadanie 10. (0-4)

Ciąg (a_n) , określony dla każdej liczby naturalnej $n \geq 1$, jest geometryczny i zbieżny. W tym ciągu $a_1 + a_3 = 20$ i $a_1^2 + a_3^2 = 328$.

Oblicz sumę wszystkich wyrazów tego ciągu. Rozważ wszystkie przypadki.

$n \in \mathbb{N}^+$
 $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
 $(a_n) \text{ zbieżny} \rightarrow |q| < 1$

$S = ?$
 (WSZYSTKIE PRZYPADKI)

① $a_1 + a_3 = 20$
 ② $a_1^2 + a_3^2 = 328$
 $S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \rightarrow S = \frac{a_1}{1-q}$

①
 $a_1 + a_1 q^2 = 20$
 $a_1(1+q^2) = 20 \quad | : (1+q^2)$
 $a_1 = \frac{20}{1+q^2}$

② $a_1^2 + (a_1 q^2)^2 = 328$
 $a_1^2(1+q^4) = 328$
 $\frac{400}{(1+q^2)^2} \cdot (1+q^4) = 328 \quad | \cdot \frac{(1+q^2)^2}{8}$
 $50(1+q^4) = 41(1+2q^2+q^4)$
 $9q^4 - 82q^2 + 9 = 0 \quad | : 9$
 $q^4 - \frac{82}{9}q^2 + 1 = 0$
 $(q^2 - \frac{41}{9})^2 = \frac{41^2}{81} - \frac{81}{81} \quad | \sqrt{}$
 $|q^2 - \frac{41}{9}| = \frac{40}{9} \quad \wedge \quad q^2 > 0$
 $q^2 = 2 \quad \vee \quad q^2 = \frac{1}{9} \quad | \sqrt{}$
 symetnie dla $|q| < 1$
 I $q = \frac{2}{3} \quad \vee \quad$ II $q = -\frac{2}{3}$
 $a_1 = 18 \quad \vee \quad a_1 = 18$

③
 I: $S = \frac{18}{1 - \frac{2}{3}} = 18 \cdot \frac{3}{1} = 27$
 II: $S = \frac{18}{1 + \frac{2}{3}} = 18 \cdot \frac{3}{5} = \frac{27}{2} = 13\frac{1}{2}$

Odp. SUMA WSZYSTKICH WYRAZÓW CIĄGU (a_n) WYNOŚI $13\frac{1}{2}$ LUB 27 .

Zadanie 11. (0-5)

W układzie współrzędnych (x, y) dane są okręgi O_1 oraz O_2 o równaniach:

$$\bullet O_1: (x-1)^2 + (y+3)^2 = 5$$

$$\bullet O_2: (x-2)^2 + (y-4)^2 = 45.$$

$$\textcircled{1} \begin{aligned} O_1(S_1; r_1): S_1 &= (1; -3); r_1 = \sqrt{5} \\ O_2(S_2; r_2): S_2 &= (2; 4); r_2 = 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

Te okręgi przecinają się w punktach A oraz B . Punkt A ma pierwszą współrzędną

dodatnią. Punkt M spełnia warunek $\overrightarrow{AM} = -2 \cdot \overrightarrow{BM}$.

Oblicz współrzędne punktów A , B oraz M .

$$\textcircled{2} \begin{aligned} A(x_A; y_A) &\in (O_1 \cap O_2) \\ B(x_B; y_B) &\in (O_1 \cap O_2) \end{aligned}$$

$\textcircled{1b} d = |S_1 S_2| < r_1 + r_2$
 $\textcircled{1} 0 < d < 4\sqrt{5}$

$\textcircled{2} \begin{cases} x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 5 \\ x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 = 45 \end{cases}$

$$\begin{aligned} 2x - 3 + 14y - 7 &= -40 \\ 2x + 14y &= -30 \quad |:2 \\ x &= -7y - 15 \end{aligned}$$

$\textcircled{2b} \begin{aligned} (x-1)^2 + (y+3)^2 &= 5 \\ (-7y-16)^2 + (y+3)^2 &= 5 \\ 49y^2 + 224y + 256 + y^2 + 6y + 9 &= 5 \\ 50y^2 + 230y + 260 &= 0 \quad |:50 \\ y^2 + \frac{23}{5}y + \frac{26}{5} &= 0 \\ \left(y + \frac{23}{10}\right)^2 &= \frac{529}{100} - \frac{26 \cdot 20}{100} \quad \sqrt{} \\ \left|y + \frac{23}{10}\right| &= \frac{3}{10} \\ y &= \frac{-23 \pm 3}{10} = \left\{ -\frac{13}{5}; -2 \right\} \\ \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} y = -\frac{13}{5} \\ x = \frac{16}{5} = 3\frac{1}{5} > 0 \end{cases} \end{aligned}$

$\textcircled{3} \text{ odc } M = (x; y):$
 $\overrightarrow{AM} = -2 \overrightarrow{BM}$

$$\begin{aligned} \left[x - \frac{16}{5}; y + \frac{13}{5}\right] &= -2[x + 1; y + 2] \\ 3x &= \frac{6}{5} \quad \wedge \quad 3y = -\frac{33}{5} \quad |:3 \\ x &= \frac{2}{5}, \quad y = -\frac{11}{5} \\ M &= \left(\frac{2}{5}; -\frac{11}{5}\right) \end{aligned}$$

Odp:
 $B(-1; -2)$, $A(3\frac{1}{5}; -2\frac{3}{5})$

Zadanie 12. (0-5)

Rozwiąż równanie

$$\textcircled{1} \quad 3\cos^2 x + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

w przedziale $\langle -\pi, \pi \rangle$.

$$\textcircled{1} \quad 3(\cos^2 x - \sin^2 x) = -\sqrt{3}\sin(2x)$$

$$3\cos(2x) = -\sqrt{3}\sin(2x) \quad / \cdot \frac{-1}{\sqrt{3}\cos(2x)} \neq 0$$

$$-\sqrt{3} = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$$

$$\tan(2x) = -\sqrt{3} \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$$

$$\underline{x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}}$$

$$\textcircled{1b} \quad \begin{array}{l} \text{oraz} \\ \text{dla} \\ \cos(2x) = 0 \end{array}$$

$$3 \cdot 0 + \sqrt{3}\sin(2x) - 3\sin^2 x = 0$$

$$\sqrt{3} \cdot 2\sin x \cos x - 3\sin^2 x = 0$$

$$\underbrace{= 0}_{\text{"}} - 3\sin^2 x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$\text{spełnione dla } \cos x = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \text{dla } x \in \langle -\pi; \pi \rangle:$$

$$\text{Odp: } \underline{x \in \left\{ -\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6} \right\}}$$

Zadanie 13. (0-5)

Podstawą ostrosłupa $ABCD S$ jest kwadrat $ABCD$. Krawędź boczna SA jest wysokością ostrosłupa, natomiast krawędź podstawy ma długość $3\sqrt{34}$. Cosinus kąta β między ścianami bocznymi CDS i BCS tego ostrosłupa jest równy $\left(-\frac{9}{25}\right)$.

Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

$H = |AS|$
 $|CS| = x + y = |CP| + |PS|$
 $a = 3\sqrt{34} = |AB| = |AC| = |BC| = |CD|$
 $\cos \beta = -\frac{9}{25}$
 $h = |BP| = |DP|$
 $P_b = ?$

① $\triangle BDP$ - Tw. cosin.
 $|BD|^2 = h^2 + h^2 - 2h^2 \cos \beta$
 $(a\sqrt{2})^2 = 2h^2(1 - \cos \beta)$
 $2a^2 = 2h^2(1 + \frac{9}{25}) \quad | :2$
 $a^2 = \frac{34}{25} h^2 \quad | \sqrt{\cdot}, a, h > 0$
 $a = \frac{\sqrt{34}}{5} h \rightarrow h = \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot a$
 $h = \frac{5}{\sqrt{34}} \cdot 3\sqrt{34} \rightarrow \underline{h = 15}$

② (zauważ)
 $\triangle CDP \sim \triangle DPS \sim \triangle ACS$
 $\frac{CP}{h} = \frac{h}{x} = \frac{y}{h} = \frac{6}{a}$
 $h^2 = xy \rightarrow y = \frac{15^2}{x}$

③ $\triangle CPD: x^2 + h^2 = a^2 \rightarrow x^2 = a^2 - 225 = 81 \rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 25 \end{cases}$
 $x + y = 34 \leftarrow$

④ $\triangle ACS:$
 $H^2 + |AC|^2 = (x + y)^2$
 $H^2 = 34^2 - (a\sqrt{2})^2$
 $H^2 = 34^2 - 2 \cdot 9 \cdot 34$
 $H^2 = 544 \quad | \sqrt{\cdot}, H > 0$
 $\underline{H = 4\sqrt{34}}$

⑤
 $P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot H + 2 \cdot \frac{1}{2} (x + y) \cdot h$
 $P_b = a \cdot H + (x + y) \cdot h$
 $P_b = 3\sqrt{34} \cdot 4\sqrt{34} + 34 \cdot 15$
 $\underline{P_b = 34(12 + 15) = 918 [j^2]}$

odp:

Zadanie 14. (0-6)

Funkcja f jest określona wzorem

$$f(x) = (2 - m)x^2 - 2(2m + 1)x + m + 8$$

dla każdej liczby rzeczywistej x , gdzie m jest liczbą rzeczywistą różną od 2. $\rightarrow x_1 \neq x_2$

Wyznacz wszystkie wartości parametru m , dla których funkcja f ma dokładnie dwa miejsca zerowe x_1 oraz x_2 tego samego znaku, które spełniają warunek

$$\begin{aligned} & \textcircled{4} (x_1 - x_2)^2 \leq 180 \quad \textcircled{1} 2 - m \neq 0 \\ & \rightarrow f(x_1) = f(x_2) = 0 \rightarrow \Delta > 0 \quad \textcircled{2} \\ & x_1 \cdot x_2 > 0 \quad \textcircled{3} \end{aligned} \quad m = ?$$

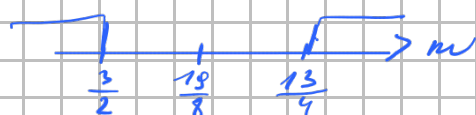
$\textcircled{1} m_1 \in \mathbb{R} - \{2\}$

$\textcircled{2} 4(2m+1)^2 - 4 \cdot (2-m)(m+8) > 0 \quad | :4$
 $4m^2 + 4m + 1 + 6m + m^2 - 16 > 0$
 $5m^2 + 10m - 15 > 0 \quad | :5$
 $m^2 + 2m - 3 > 0$
 $(m+3)(m-1) > 0$
 $m_2 \in (-\infty; -3) \cup (1; \infty)$

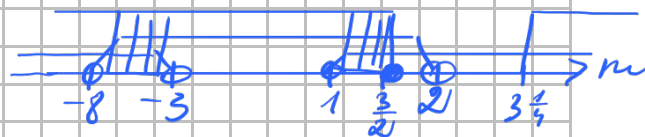
$\textcircled{3} \frac{m+8}{2-m} > 0 \quad | \cdot (2-m)^2 > 0$
 $(m+8)(2-m) > 0$
 $-(m+8)(m-2) > 0$
 $m_3 \in (-8; 2)$

$\textcircled{4} (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \leq 180$

$\left[\frac{2(2m+1)}{2-m} \right]^2 - 4 \cdot \frac{m+8}{2-m} \leq 180 \quad | \cdot \frac{(2-m)^2}{4}$
 $4m^2 + 4m + 1 - (m+8)(2-m) \leq 45(4 - 4m + m^2)$
 $4m^2 + 4m + 1 + m^2 + 6m - 16 - 45 \cdot 4 + 45 \cdot 4m - 45m^2 \leq 0$
 $-40m^2 + 190m - 185 \leq 0 \quad | : (-40)$
 $m^2 - \frac{19}{4}m + \frac{39}{8} \geq 0$
 $(m - \frac{19}{8})^2 \geq \frac{19^2}{64} - \frac{39 \cdot 8}{64} \quad | \sqrt{\quad}$
 $|m - \frac{19}{8}| \geq \frac{7}{8}$



$m_4 \in (-\infty; \frac{3}{2}) \cup (\frac{13}{4}; \infty)$



odp: $m \in (-8; -3) \cup (1; \frac{13}{4})$

Zadanie 15. (0-6)

Rozważamy wszystkie stożki, których wysokość jest większa od 5, a odległość środka podstawy od tworzącej jest równa 5.

a) Wykaż, że objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

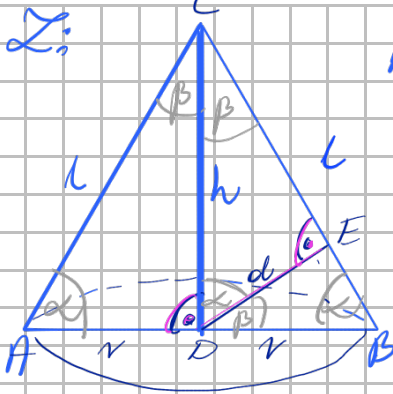
b) Objętość V stożka, jako funkcja wysokości h stożka, wyraża się wzorem

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

dla $h \in (5, +\infty)$.

Wyznacz wysokość tego z rozważanych stożków, którego objętość jest najmniejsza.
Oblicz tę najmniejszą objętość.

Ad. a)



$h = |CD| > 5$
 $d = |DE| = 5$
 $l = |CA| = |CB|$

$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

$\angle CBA = \angle CAB = \angle CDE$

$\Delta DBE \sim \Delta DEC \sim \Delta DBC$ (2 w.p. kł.)

$\cos \beta = \frac{d}{r} = \frac{|CE|}{h} \quad \wedge \quad |CE|^2 + d^2 = h^2$

$r = \frac{d \cdot h}{|CE|} \quad \wedge \quad |CE|^2 = h^2 - d^2$

$r = \frac{5 \cdot h}{|CE|} \quad |^2$

$r^2 = \frac{25h^2}{h^2 - d^2} \quad \wedge \quad d = 5$

$r^2 = \frac{25h^2}{h^2 - 25}$

$V = \frac{1}{3} \pi r^2 \cdot h$

$V(h) = \frac{1}{3} \pi \cdot \frac{25h^2}{h^2 - 25} \cdot h$

$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$

end.

Ad. b)

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{25h^3}{h^2 - 25}$$

$$D: h \in (5; \infty)$$

$V(h) =$ najmniejsza (NM)

$$h = ?$$

$$V_{NM} = ?$$

$$V(h) = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{h^3}{h^2 - 25} \quad \wedge \quad D = (5; \infty)$$

③

$$V' = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{3h^2(h^2 - 25) - h^3 \cdot 2h}{(h^2 - 25)^2} = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{h^2 [3(h^2 - 25) - 2h^2]}{(h-5)^2(h+5)^2}$$

$$V' = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{h^2(h^2 - 75)}{(h-5)^2(h+5)^2} = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{h^2(h+5\sqrt{3})(h-5\sqrt{3})}{(h-5)^2(h+5)^2}$$

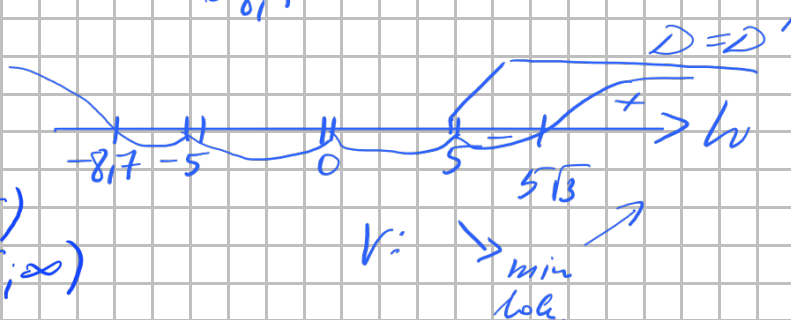
④ WK: $V'(h) = 0$ dla $h = 5\sqrt{3} \approx 8,7$ $\wedge \quad D' = (5; \infty)$

⑤ WN.

$$V'(h) = 0 \text{ dla } h = 5\sqrt{3}$$

$$V'(h) < 0 \text{ dla } h \in (5; 5\sqrt{3})$$

$$V'(h) < 0 \text{ dla } h \in (5\sqrt{3}; \infty)$$



$$V_{\min_{\text{lokal}}} (5\sqrt{3}) = V_{NM} (5\sqrt{3})$$

$$V_{NM} (5\sqrt{3}) = \frac{25\pi}{3} \cdot \frac{125 \cdot 3\sqrt{3}}{25 \cdot 3 - 25} = \cancel{25\pi} \cdot \frac{125\sqrt{3}}{50} = \underline{\underline{\frac{125\sqrt{3}}{2} \pi}}$$

Odp: DLA $h = 5\sqrt{3}$ OBJĘTOŚĆ STÓŻKA JEST
 NAJMNIEJSZA I WYNOŚI $\underline{\underline{\frac{125\sqrt{3}}{2} \pi}}$.

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015

MATEMATYKA

Poziom rozszerzony

Formuła 2015